Algoritma Keprimitifan Dari Suatu Digraph

[1]Muhammad Fathoni, [2]Hari Sumardi
[1]Politeknik Unggul LP3M, Indonesia
[2]Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Bengkulu, Indonesia

Email: mhd.fathoni@gmail.com[1], harisumardi@unib.ac.id[2]

ABSTRAK - Sebuah digraf D disebut terhubung kuat jika untuk setiap dua buah node u dan v dalam D, terdapat sebuah perjalanan dari u ke v dan sebuah perjalanan dari v ke u. Sebuah digraf terhubung kuat dikatakan primitif jika ada sebuah bilangan bulat positif k sedemikian hingga untuk setiap pasangan node (u,v) ada sebuah jalan dari u ke v dengan panjang k. Matriks ketetanggaan A dari sebuah digraf D dikatakan primitif jika A^m>0, untuk sebuah bilangan bulat positif m.

Kata kunci: Digraf, Matriks ketetanggaan, Primitif

ABSTRACT *- A digraph D is called strongly connected if for any two nodes u and v in D there is a walk from u to v and a walk from v to u, respectively. A strongly connected digraph is said to be primitive if there exists a positive integer k such that for every pair of nodes (u,v) there exists a walk from u to v of length k. The adjacency matrix A of a digraph D is primitive if A^m>0, for a positive integer m.*
Keywords: Digraph, Neighborhood matrix, Primitive
ah nodes u and v in D have a walk from u to v and a walk from v to u, respectively. A strongly connected digraph is said to be primitive if there is a positive integer k such that for every pair of nodes (u,v) there is a walk from u to v of length k. The adjacency matrix A of a digraph D is primitive if A^m>0, for a positive integer m.

Keywords: Digraph, Neighborhood matrix, Primitive

PENDAHULUAN

Suatu graph G merupakan suatu objek terdiri atas kumpulan titik yang disebut dengan node dan garis yang menyambungkan dua buah node disebut dengan edge atau sisi. Pengulangan untuk setiap node (u,v) dan (u,v) pada graph G dapat dituliskan dengan (u,v). Suatu graph dikatakan terhubung jika ada suatu bilangan bulat positif k, sehingga untuk pasangan node u dan v terdapat walk (jalan) yang panjangnya k dari node u ke v dan walk dari v ke u. (Bo, 2003) : sebuah graph G dikatan primitif jika dan hanya jika graph G terhubung dan G memiliki paling sedikit satu cycle ganjil, yang mana cycle ganjil adalah suatu cycle dengan panjang ganjil. Kim (Kim et al., 2007) mengatakan bahwa sebuah graf $G = (V, E)$ pada n buah simpul adalah primitif jika ada sebuah bilangan bulat positif k sedemikian hingga untuk setiap pasangan simpul u, v dari G, ada sebuah lintasan dengan panjang k dari u ke v.

Misalkan G adalah sebuah graph atas n node $v_1, v_2, \dots, v_n$. Sebuah matriks ketetanggaan dari graph G adalah sebuah matriks (1,0) dari matriks bujursangkar A yang berordo n dimana entri a_{ij} dari matriks A adalah 1 jika terdapat sisi yang menghubungkan i dengan j dan 0 jika tidak terdapat sisi yang menghubungkan i dengan j. Matriks A adalah primitif jika setiap elemen dari A^m adalah positif, untuk suatu bilangan bulat positif m. Suwilo (Suwilo, 2005) Sebuah graf terhubung G adalah primitif jika ada sebuah bilangan bulat positif k sedemikian sehingga untuk setiap pasangan simpul u dan v di G ada sebuah lintasan dengan panjang t yang menghubungkan u dan v.

Pola pikir dari graph primitif banyak digunakan pada banyak hal, salah satu diantaranya yaitu pada Automata atau Google networking. Pengaplikasian graph yang diterapkan pada Google yaitu keterhubungan antara suatu website terhadap keywords yang diinput. Dengan keywords yang dimasukkan, maka Google akan mencari keywords pada website-website yang memiliki kaitan dengan keywords tersebut. Graph akan terbentuk dari website yang memiliki kaitan dengan keywords tersebut. Page dan Brin (Langville, A.N. and Meyer, 2006) mengungkapkan, graph Google harus primitif karena jika graph Google tidak primitif akan menyebabkan pencarian tidak akan berhasil. Pada Page dan Brin (Langville, A.N. and Meyer, 2006) menambahkan bahwa graph Google harus merupakan matriks bujur sangkar S dengan $S^m > 0$, dan$m > 0$. Berdasrkan pendapat (Langville, A.N. and Meyer, 2006), graph Google merupakan graph yang primitif dikarenakan semua elemen dari S^m adalah positif. Graph primitif juga diaplikasikan pada Automata. Penggunaan graph primitif pada automata yaitu tentang sinkronisasi automata. Culik (Culik et al., 2002) menyebutkan setiap Automata yang primitif adalah sinkron dan tidak sinkron jika imprimitif.

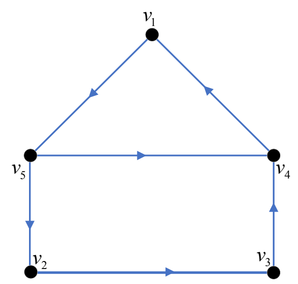
Graph berarah atau yang disebut juga dengan Digraph adalah bagian dari teori graph. Sama halnya dengan graph, sebuah digraph D merupakan sebuah objek yang terdiri dari kumpulan titik-titik yang disebut dengan node dan garis berarah yang menghubungkan dua buah node di D disebut dengan arc atau busur. Suatu digraph D disebut dengan Digraph dengan strongly connected (terhubung kuat) jika tiap-tiap pasangan node u dan node v atau (u, v) di D terdapat walk atau jalan dari node u ke node v dan walk dari node v ke node u. Brualdi (Brualdi & Ryser, 1991) : sebuah digraph D dikatakan primitif jika dan hanya jika D terhubung kuat dan merupakan Greatest Common Diviso (GCD) atau pembagi persekutuan terbesar dari panjang cycle-cycle di D adalah 1. (Brualdi & Ryser, 1991) mengakatan: suatu digraph D dikatakan primitif jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat positif k sedemikian sehingga untuk setiap pasangan node (u, v) di D terdapat walk dengan panjang k. Leroy & Sarah (Beasley & Mousley, 2014) : Digraf D dikatakan primitif jika untuk beberapa m, di antara pasangan simpul-simpul terurut dari D terdapat sebuah lintasan berarah dengan panjang m dari simpul pertama ke simpul yang lain. Mahony & Rachel (O'Mahony & Quinlan, 2019) : Sebuah graf berarah (digraph) adalah primitif dengan eksponen t jika graf tersebut memiliki lintasan-lintasan dengan panjang t di antara semua pasangan simpul.

Digraph

Digraph atau graph yang memiliki arah merupakan kumpulan dari titik (node) yang dihubungkan oleh *arc* (busur berarah). Hal yang membedakan digraph dengan graph adalah busurnya, kalau pada graph hanya berupa sisi.

Visualisasi dari suatu digraph D dapat digambarkan seperti gambar berikut.

Contoh 1. Visualisasi pada suatu digraph yang memiliki 5 node.

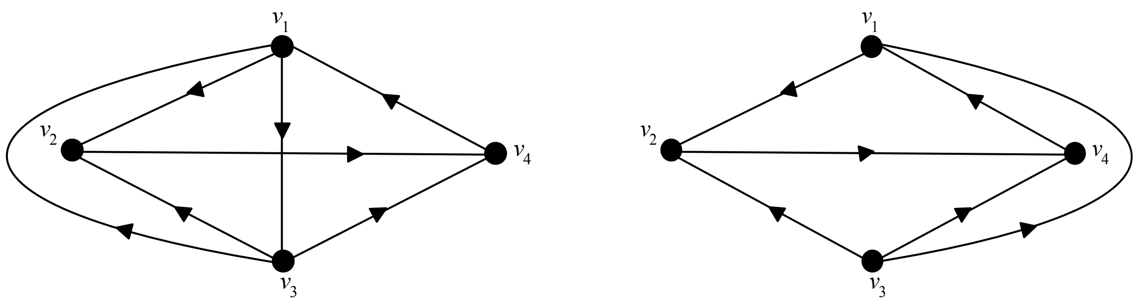


Gambar 1. Visualisasi dari suatu digraph

Pada Gambar 1 dapat dilihat bahwa himpunan V yaitu merupakan himpunan dari node $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan juga terdapat himpunan E merupakan himpunan busur yakni $E = \{(1,5), (2,3), (3,4), (4,1), (5,2), (5,4)\}$.

Primitifitas

Suatu graph berarah atau digraph dikatakan *strongly connected* (terhubung kuat) jika untuk tiap-tiap pasangan node (u, v) di D terdapat *walk* atau jalan dari node u ke v dan sebaliknya yaitu dari v ke u. Sebaliknya, seuatu digraph akan dikatakan bukan terhubung kuat jika terdapat beberapa pasangan node (u, v) di D tidak memiliki *walk* atau jalan dari u ke v atau sebaliknya yaitu tidak memiliki jalan dari v ke u. Untuk dapat memahami lebih jauh terhadap digraph terhubung kuat dan digraph tidak terhubung kuat dapat dipresentasikan pada Gambar 2 berikut. Gambar 2(a) mempresentasikan suatu digraph terhubung kuat dikarenakan pada setiap node u dan v di D, meiliki *walk* atau jalan dari u ke v dan jalan dari v ke u. Contohnya, jalan dari node 2 ke node 1 yaitu $2 \to 4 \to 1$, berikutnya *walk* dari node 1 ke node 2 yaitu $1 \to 3 \to 2$, begitu pula untuk pasangan node yang lain. Gambar 2(b) mempresentasikan suatu digraph *not strongly connected* atau tidak terhubung kuat. Pada digraph ini, cukup dengan menunjukan terdapat *walk* dari node 3 ke node 1 yaitu $3 \to 1$ namun tidak terdapat jalan dari node 1 ke node 3, sehingga digraph tersebut adalah digraph tidak terhubung kuat.



Gambar 2. (a) Digraph terhubung kuat (b) digraph tak terhubung kuat

Matriks Ketetanggaan

Misalkan D adalah digraph terdiri dari n node $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Suatu $A = (a_{ij})$ yang merupakan matriks ketetanggaan dari D merupakan sebuah matriks bujursangkar yang memiliki ordo n didefinisikan seperti berikut ini.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{jika terdapat } arc \text{ dari node } i \text{ ke node } j \\ 0, \text{jika tidak terdapat } arc \text{ atau sebaliknya} \end{cases}$$

dengan $i, j = 1,2, \ldots, n$.

Berikut adalah contoh matriks ketetanggaan pada suatu digraph.

Contoh 2 Dilihat pada Gambar 2(a) dan 2(b), matriks ketetanggaannya masing-masing yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks$A$ yang merupakan suatu matriks ketetanggaan dari sebuah digraph D dikatakan primitif, jika ada bilangan bulat positif k sehingga semua elemen/entri dari A^k adalah positif. Pernyataan ini sesuai dengan gagasan Wielandt (Schneider, 2002), yaitu jika suatu matriks tak negatif A dikatakan primitif kalau $A^k > 0$. Pada Contoh 2, matriks ketetanggaan A merupakan suatu matriks ketetanggaan dari digraph primitif, ini dapat dilihat yakni

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ambil suatu bilangan bulat positif k yang lebih dari 1 maka diperoleh

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ A^4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ A^5 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Untuk nilai $A^k > 0, k > 5$. Dengan demikian dapat diambil kesimpulan bahwa seluruh elemen pada A^k dengan $k \geq 4$ adalah positif.

Matriks B merupakan matriks dari digraph yang *not strongly connected* (tak terhubung kuat), dengan demikian Matriks B adalah tidak primitif. Misalkan B adalah matriks primitif maka untuk bilangan bulat positif k, $B^k > 0$. Jika primitif, maka untuk nilai k yang besar, semua elemen B^k adalah positif. Diambil $k = 30$ maka diperoleh

$$B^{30} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk bilangan bulat positif $k > 30$, elemen dari B^k hanya berada di interval $[0,1]$. Karena masih terdapat elemen baris yang semuanya bernilai 0, hal ini membuat digraph D dengan matriks ketetanggaan B tidak primitif.

METODE PENELITIAN

Untuk mencari keprimitifan suatu matriks ketetanggaan dalam ukuran besar akan lebih mudah jika dilakukan dengan menggunakan alat bantu berupa komputer. Oleh karena itu untuk menyesaikan permasalahan secara komputerisasi maka akan dirancang algoritma untuk mencari Primitifitas Digraph dan menerapkan algoritma yang didapat dalam program (MALTAB).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Komputasi dalam persoalan primitifitas digraph di awali dengan matriks ketetanggaan A dari digraph D. Pada Bagian Matriks Ketetanggaan, telah dijelaskan bahwa matriks ketetanggaan A dari digraph D adalah primitif jika seluruh elemen $A^m > 0$ untuk suatu bilangan bulat positif m. Bila matriks ketetanggaan A adalah matriks primitif mengakibatkan digraph D juga primitif. Dalam hal ini, penulis melakukan komputasi dengan menggunakan softwere MATLAB berdasarkan Algoritma 1.

Algoritma 1. Primitifitas Digraph

$A \leftarrow adjacency\ Matrix\ dari\ digraph\ D$
$begin$

$for\ \ i \leftarrow 1\ \ to\ \ k\ \ do$
$\quad I \leftarrow I * A\ \{\ I\ merupakan\ matriks\ identitas\ \}$
$\quad if\ \ I > 0$
$\qquad write(primitif)$
$\quad else$
$\qquad write(imprimitif)$
$end;$
$output\ :\ primitifitas\ dari\ digraph\ D$

Dengan menerapkan algoritma 1 pada pemograman MATLAB, digraph pada Contoh 2(a) dan 2(b) dapat ditentukan apakah kedua digraph primitif atau tidak, dimana hasilnya dapat dilihat pada Gambar 3 berikut.

```
>> AA=[0,1,1,0; 0,0,0,1; 1,1,0,1; 1,0,0,0];
>> primitif(AA)
            ______________________________
           |                              |
           |      Digraph Primitif        |
           |______________________________|
>>
>> BB=[0,1,0,0; 0,0,0,1; 1,1,0,1; 1,0,0,0];
>> primitif(BB)
            ______________________________
           |                              |
           |      Digraph Imprimitif      |
           |______________________________|
>> |
```

Gambar 3. Komputasi Primitifitas Digraph

SIMPULAN

Sebuah digraph D dikatakan primitif jika:

1. Digraph D terhubung kuat.
2. Pembagi persekutuan terbesar dari panjang *cycle-cycle* di D adalah 1.

Sebuah matriks ketetanggaan A dari digraph D dikatakan matriks primitif bilamana seluruh entri $A^m > 0$ untuk suatu bilangan bulat positif m. Hal ini berakibat, digraph D adalah primitif jika matiks ketetanggaannya merupakan matriks primitif.

.

DAFTAR PUSTAKA

Beasley, L. B., & Mousley, S. (2014). k-Primitivity of digraphs. *Linear Algebra and Its*

Applications, *449*, 512–519. https://doi.org/10.1016/J.LAA.2014.02.039

Bo, Z. (2003). Exponents of primitive graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, *28*(10201009), 67–72.

Brualdi, R. A., & Ryser, H. J. (1991). *Combinatorial Matrix Theory*. https://doi.org/10.1017/CBO9781107325708

Culik, K., Karhumaki, J., & Kari, J. (2002). A Note on Synchronized Automata and Road Coloring Problem. *Lecture Notes in Computer Science (Including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, *2295 LNCS*, 175–185. https://doi.org/10.1007/3-540-46011-X_14

Kim, B. M., Song, B. C., & Hwang, W. (2007). Primitive graphs with given exponents and minimum number of edges. *Linear Algebra and Its Applications*, *420*(2–3), 648–662. https://doi.org/10.1016/J.LAA.2006.08.021

Langville, A.N. and Meyer, C. . (2006). *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*. Princeton University Press.

O'Mahony, O., & Quinlan, R. (2019). Exponent-critical primitive graphs and the Kronecker product. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications (EJGTA)*, *7*(2), 329–347. https://doi.org/10.5614/EJGTA.2019.7.2.10

Schneider, H. (2002). Wielandt's proof of the exponent inequality for primitive nonnegative matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, *353*(1–3), 5–10. https://doi.org/10.1016/s0024-3795(02)00414-7

Suwilo, S. (2005). ON EXPONENTS OF PRIMITIVE GRAPHS. *Proceedings of ICMSA*, *1*(1). https://jurnal.usk.ac.id/ICMSA/article/view/2707